



12. Pewarnaan dan Dekomposisi Vertex

Oleh : Ade Nurhopipah

Pokok Bahasan :

1. Pewarnaan Vertex
2. Algoritma Pewarnaan Vertex
3. Vertex Dekomposisi

Sumber :

Aldous, Joan M. ,Wilson, Robin J. 2004. *Graph and Applications*. Springer: UK.

Pada bab ini kita akan mempelajari masalah yang melibatkan pewarnaan vertex pada sebuah graph dan memperkenalkan algoritma untuk pewarnaan vertex. Kita juga akan mempelajari masalah yang berkaitan dengan pembagian himpunan vertex dari sebuah graph ke dalam sub himpunan yang berbeda dengan sifat tertentu.

Pewarnaan Vertex

Contoh 12.1 Penyimpanan bahan kimia

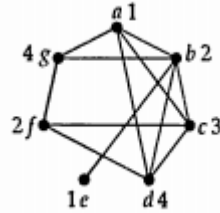
Sebuah perusahaan kimia, ingin menyimpan bahan kimia di sebuah Gudang. Beberapa bahan kimia bereaksi berbahaya ketika terjadi kontak satu sama lain. Perusahaan memutuskan untuk membagi gudang ke dalam beberapa area sehingga mereka dapat memisahkan pasangan bahan kimia yang berbahaya. Tabel 12.1 mengindikasikan pasangan bahan kimia yang harus dipisahkan. Berapa jumlah area minimal yang dibutuhkan untuk menyimpan bahan kimia ini secara aman?

Tabel 12.1 Pasangan bahan kimia yang bereaksi berbahaya

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	-	*	*	*	-	-	*
<i>b</i>	*	-	*	*	*	-	*
<i>c</i>	*	*	-	*	-	*	-
<i>d</i>	*	*	*	-	-	*	-
<i>e</i>	-	*	-	-	-	-	-
<i>f</i>	-	-	*	*	-	-	*
<i>g</i>	*	*	-	-	-	*	-

Kita mencatat bahwa bahan kimia *a,b,c,d* semuanya harus dipisahkan, sehingga setidaknya empat area dibutuhkan untuk menyimpan bahan kimia tersebut secara terpisah. Gambar 12.1 menunjukkan representasi graph untuk masalah ini, di mana vertex mewakili tujuh bahan kimia, dan dua vertex dihubungkan oleh edge jika kedua bahan kimia harus dipisahkan. Jika kita mewarnai vertexnya, maka setiap vertex yang bertetangga harus diwarnai berbeda. Empat warna yang diperlukan ditandai dengan angka di samping vertex pada graph tersebut. Empat warna 1,2,3 dan 4 ini mewakili empat area gudang.





Gambar 12.1 Representasi masalah penyimpanan bahan kimia

Dengan ini kita dapat membagi himpunan bahan kimia ke dalam empat himpunan yang tak terhubung yaitu $\{a,e\}$, $\{b,f\}$, $\{c\}$, $\{d,g\}$. Keempat himpunan ini bersesuaian dengan empat area yang dibutuhkan.

Bilangan Kromatik

Definisi 12.1

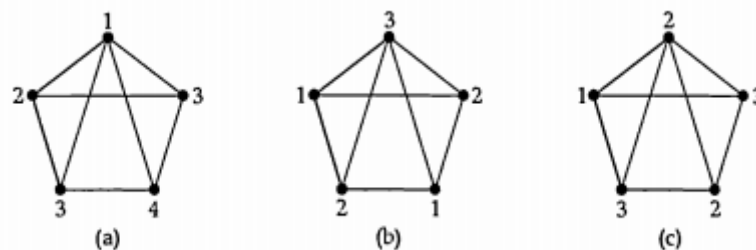
Misalkan G adalah graph sederhana, sebuah pewarnaan k dari G adalah penandaan dengan paling banyak k warna pada vertex di G , sedemikian rupa sehingga vertex yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda. Jika G memiliki pewarnaan k , maka G di sebut k -colourable. Bilangan kromatik dari G yang dinotasikan dengan $\chi(G)$ merupakan bilangan terkecil k untuk G yang k -colourable.

Pada contoh 12.1, graph tersebut memiliki bilangan kromatik sama dengan 4.

Catatan :

Definisi 12.1 berlaku hanya pada graph sederhana. Loop tidak dapat dimasukkan karena pada suatu pewarnaan k , dua vertex yang insiden dengan edge harus memiliki warna yang berbeda. Sedangkan pada loop hanya terdapat sebuah vertex. Kita juga tidak menggunakan sisi ganda, karena adanya sebuah edge antara dua vertex memaksanya untuk diwarnai berbeda, dan penambahan sebuah edge diantara keduanya tidak relevan dengan pewarnaan. Sehingga kita membatasi perhatian kita pada graph sederhana.

Kita biasanya menunjukkan pewarnaan k dengan menulis bilangan $1,2,\dots,k$ disamping vertex. Misalnya pada diagram 12.2(a) dan (b) diilustrasikan sebuah pewarnaan 4 dan pewarnaan 3 dari sebuah graph G dengan lima vertex. Catat bahwa diagram (c) bukanlah pewarnaan 3 dari G , karena terdapat dua vertex yang bertetangga dan diwarnai sama.

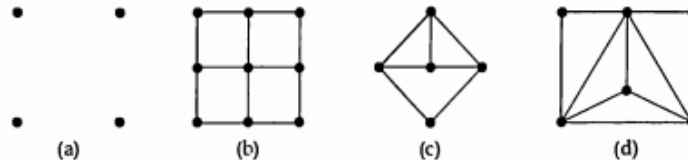


Gambar 12.2 Pewarnaan vertex pada sebuah graph

Karena G memiliki pewarnaan 3, maka $\chi(G) \leq 3$, sehingga 3 adalah batas atas untuk $\chi(G)$. Begitu juga G memuat tiga vertex bertetangga yang membentuk segi tiga dan harus diwarnai dengan tiga warna berbeda, sehingga $\chi(G) \geq 3$, sehingga 3 adalah batas bawah dari $\chi(G)$. Dengan mengkombinasikan pertidaksamaan ini, kita mendapatkan $\chi(G)=3$.

Latihan 12.1

1. Tentukan $\chi(G)$ untuk setiap graph G berikut.



2. Apa yang dapat kamu katakan tentang graph G dengan:
 - a. $\chi(G)=1$
 - b. $\chi(G)=3$
3. Tulislah bilangan kromatik dari graph berikut.
 - a. Graph Komplit K_n
 - b. Graph Bipartit Komplit $K_{r,s}$
 - c. Graph cycle C_n ($n \geq 3$)
 - d. Sebuah tree
4. Tentukan apakah setiap pernyataan tentang graph G ini benar atau salah dan berilah pembuktian atau contoh yang sesuai.
 - a. Jika G memuat graph komplit K_r sebagai sebuah subgraph, maka $\chi(G) \geq r$.
 - b. Jika $\chi(G) \geq r$, maka G memuat graph komplit K_r sebagai sebuah subgraph.

Jika diberikan sebuah graph G , bagaimana kita menentukan sebuah bilangan kromatiknya?

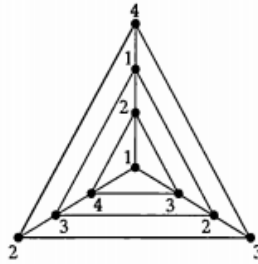
Kita telah melihat bahwa batas atas dan batas bawah dari $\chi(G)$ dapat didapatkan dengan konstruksi berikut.

Untuk mendapatkan batas atas untuk $\chi(G)$, bangun sebuah pewarnaan eksplisit untuk vertex di G .

Untuk mendapatkan batas bawah untuk $\chi(G)$, temukan jumlah vertex pada subgraph komplit dari G .

Sebagai contoh, jika G memuat sebuah segitiga (K_3), maka $\chi(G) \geq 3$.

Jika kita dapat menemukan sebuah batas atas dan batas bawah yang sama, maka $\chi(G)$ sama dengan nilai tersebut. Sebagai contoh, vertex graph G pada Gambar 12.3 dapat diwarnai dengan 4 warna, sehingga $\chi(G) \leq 4$. Tetapi G tidak dapat diwarnai dengan kurang dari empat warna, Karena G memuat graph komplit K_4 , maka $\chi(G) \geq 4$. Dengan mengkombinasikan kedua pertidaksamaan, kita dapatkan $\chi(G)=4$.



Gambar 12.3 Contoh graph untuk pencarian batas bawah dan batas atas $\chi(G)$

Catat bahwa jika sebuah graph G memiliki n vertex, maka $\chi(G) \leq n$. Namun, batas atas ini biasanya kurang cukup, kecuali ketika G memiliki banyak edge. Pertidaksamaan ini menjadi persamaan ($\chi(G)=n$) jika G adalah graph Komplit K_n . Kita dapat mengembangkan batas atas ini, jika kita mengetahui vertex berderajat paling besar di G , seperti ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 12.1

Misal G adalah graph sederhana dengan maksimum derajat titik d , maka berlaku:

$$\chi(G) \leq d+1$$

Bukti :

Bukti dengan induksi matematika dari n yang merupakan jumlah vertex dari G .

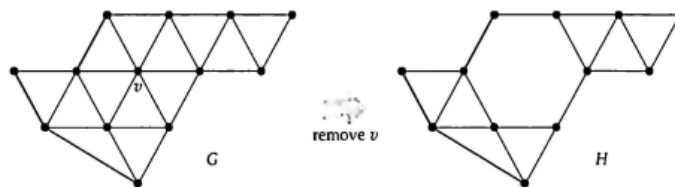
Langkah 1 :

Pernyataan untuk K_1 benar, graph sederhana ini memiliki satu vertex, karena $\chi(K_1) = 1$ dan $d=0$.

Langkah 2

Kita asumsikan bahwa $\chi(H) \leq d+1$ untuk semua graph sederhana H yang memiliki vertex lebih kecil dari n . Kita ingin memunjukkan bahwa $\chi(G) \leq d+1$ untuk semua graph sederhana G dengan n vertex.

Misalnya G adalah graph sederhana dengan n vertex dan derajat titik maksimal d , dan misalkan H adalah graph yang diperoleh dari G dengan menghapus sebuah vertex v dan edge yang insiden dengannya seperti ditunjukkan sebagai berikut.



Graph H memiliki vertex yang lebih kecil dari n , dan derajat vertex maksimal adalah d atau lebih kecil dari d , sehingga dengan asumsi, $\chi(H) \leq d+1$, maka graph H adalah $(d+1)$ -colourable. Kita bisa mendapatkan sebuah $(d+1)$ pewarnaan dari G dengan mewarnai v dengan suatu warna yang tidak ditetapkan pada paling banyak d vertex yang bertetangga dengan v , karena vertex-vertex ini dapat diwarnai dengan paling banyak d warna. Karena itu $\chi(H) \leq d+1$.

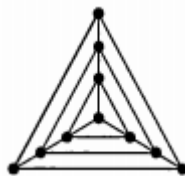
Pernyataan ini benar untuk setiap graph sederhana dengan vertex kurang dari n , maka ini benar untuk semua graph sederhana dengan n vertex. Langkah 2 selesai.

Maka, dengan prinsip induksi matematika, pernyataan ini benar untuk seluruh graph sederhana dengan n vertex, untuk n adalah bilangan integer positif.

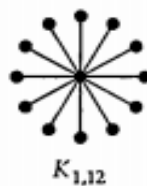
Teorema 12.2 : Teorema Brook

Misalkan G adalah graph sederhana terhubung dengan derajat vertex maksimal d . Jika G bukan merupakan graph cycle dengan jumlah vertex yang ganjil dan bukan pula graph Komplit, maka berlaku : $\chi(G) \leq d$

Untuk menggambarkan pemakaian teorema Brook, kita menyajikan graph G berikut di mana kita diperoleh bahwa $\chi(H) \geq 4$, karena G memuat graph komplit K_4 . Pada sisi lain, G memenuhi kondisi teorema Brooks dengan $d=4$, maka $\chi(H) = 4$.



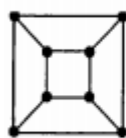
Sayangnya, situasi ini tidak selalu sesuai. Jika G memuat vertex yang sedikit dengan derajat yang tinggi, maka hubungan yang diberikan pada teorema Brook mungkin tidak cukup. Sebagai contoh, jika graph bipartite $K_{1,12}$, maka teorema Brook memberikan batas atas $\chi(G) \leq 12$, di mana nilai sebenarnya $\chi(G)$ adalah 2.



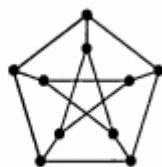
Latihan 12.2

Untuk setiap graph berikut, tuliskan

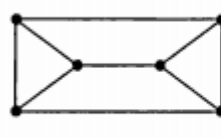
- Batas bawah $\chi(G)$ yang diberikan oleh ukuran dari subgraph komplit terbesar pada graph G
- Batas atas untuk $\chi(G)$ yang diberikan oleh teorema Brook
- Nilai sebenarnya dari $\chi(G)$ dan pewarnaan dengan memakai $\chi(G)$ warna.



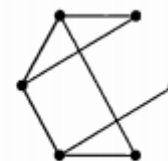
(a)



(b)



(c)



(d)

Kita merangkum hasil yang telah kita pelajari sebagai berikut.

Untuk mendapatkan bilangan kromatik $\chi(G)$ dari graph sederhana G

Temukan batas atas dan batas bawah yang sama, maka $\chi(G)$ sama dengan nilai tersebut.

Batas atas untuk $\chi(G)$

- Jumlah warna pada pewarnaan eksplisit vertex dari G
- Jumlah n dari vertex di G
- $d+1$ di mana d adalah derajat vertex maksimal di G
- d , di mana d adalah derajat vertex maksimal di G , di mana G bukan C_n dengan n ganjil atau K_n (Teorema Brook)

Batas bawah untuk $\chi(G)$

Jumlah vertex pada subgraph komplit pada graph G .

Pewarnaan Graph Planar

Kita mungkin akan menduga bahwa semakin kompleks sebuah graph, semakin banyak warna yang dibutuhkan untuk mewarnai vertex-nya. Pada subbab ini, kita akan menunjukkan, bahwa dugaan ini tidak tepat untuk graph planar. Bilangan kromatik untuk setiap graph planar adalah bilangan yang kecil. Pertama, dalam tipe ini kita akan menunjukkan bahwa setiap graph planar adalah 6-colorable.

Teorema 12.3 : Teorema Enam Warna untuk Graph Planar

Vertex pada setiap graph planar terhubung sederhana G , dapat diwarnai dengan enam warna (atau kurang) sedemikian rupa sehingga setiap vertex yang bertetangga diberi warna yang berbeda.

Bukti :

Bukti dengan induksi matematika pada bilangan n , yang merupakan jumlah vertex pada graph G .

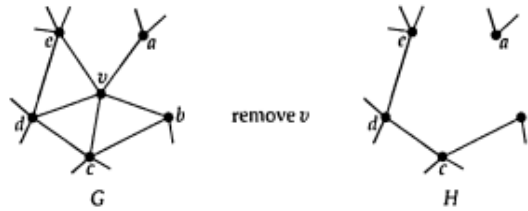
Langkah 1

Pernyataan ini benar untuk $n=1$. (Pernyataan ini jelas benar untuk semua graph dengan jumlah vertex sampai enam, karena setiap vertex dapat diwarnai oleh kurang atau sama dengan enam warna yang berbeda.

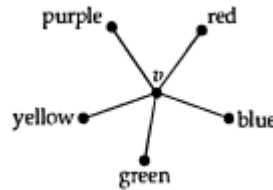
Langkah 2

Kita asumsikan bahwa vertex pada graph planar sederhana terhubung dengan jumlah kurang dari n vertex dapat diwarnai dengan enam warna atau kurang. Kita akan membuktikan bahwa vertex pada semua graph planar terhubung sederhana dengan n vertex dapat diwarnai dengan enam warna atau kurang.

Misalkan G adalah graph planar terhubung sederhana dengan n vertex. Menurut Akibat 11.3, graph ini memuat sebuah vertex v dengan derajat 5 atau kurang. Kita menghapus v dan edge yang insiden dengannya. Maka graph planar H yang dihasilkan memiliki jumlah vertex kurang dari n seperti ditunjukkan sebagai berikut.



Dengan asumsi kita, vertex H (atau setiap komponen dari H , jika H tidak terhubung) dapat diwarnai dengan enam warna sedemikian rupa sehingga vertex yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda. Kita kini kembali menyimpan vertex v sebagai berikut.



Karena v memiliki paling banyak lima tetangga, dan enam warna tersedia, maka ada sebuah warna yang dapat dipakai untuk vertex v . Ini memberi kita sebuah 6 pewarnaan pada vertex G seperti yang diinginkan. Jika pernyataan ini benar untuk semua graph planar terhubung sederhana dengan jumlah vertex kurang dari n , maka ini benar untuk semua graph planar terhubung sederhana dengan n vertex. Langkah 2 selesai.

Karena itu, dengan prinsip induksi matematika, pernyataan ini benar untuk semua grap planar terhubung sederhana dengan n vertex, untuk setiap bilangan integer positif n .

Teorema 12.4 : Teorema Lima Warna untuk Graph Planar

Vertex pada setiap graph planar terhubung sederhana G , dapat diwarnai dengan lima warna (atau kurang) sedemikian rupa sehingga setiap vertex yang bertetangga diberi warna yang berbeda.

Bukti :

Bukti dengan induksi matematika pada bilangan n , yang merupakan jumlah vertex pada graph G .

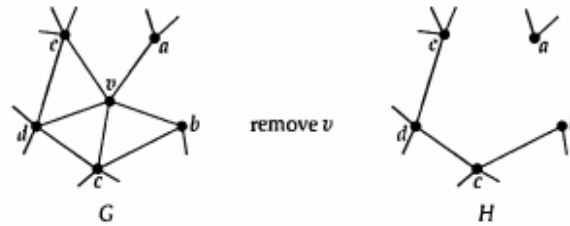
Langkah 1

Pernyataan ini benar untuk $n=1$. (Pernyataan ini jelas benar untuk semua graph dengan jumlah vertex sampai lima, karena setiap vertex dapat diwarnai oleh kurang atau sama dengan lima warna yang berbeda.

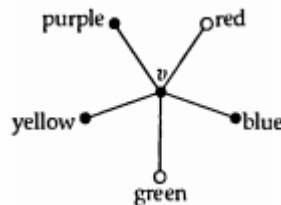
Langkah 2

Kita asumsikan bahwa vertex pada graph planar sederhana terhubung dengan jumlah kurang dari n vertex dapat diwarnai dengan lima warna atau kurang. Kita akan membuktikan bahwa vertex pada semua graph planar terhubung sederhana dengan n vertex dapat diwarnai dengan lima warna atau kurang.

Misalkan G adalah graph planar terhubung sederhana dengan n vertex. Menurut Akibat 11.3. Graph ini memuat sebuah vertex v dengan derajat 5 atau kurang. Kita menghapus v dan edge yang insiden dengannya. Maka graph planar H yang dihasilkan memiliki jumlah vertex kurang dari n .

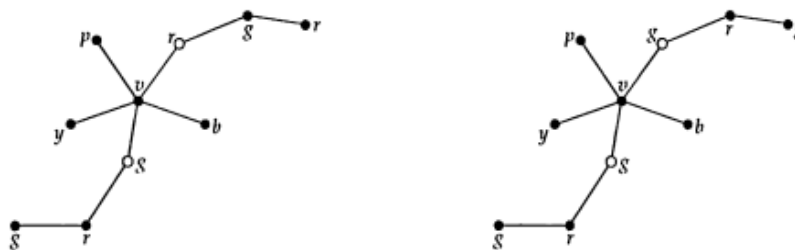


Dengan asumsi kita, vertex H (atau setiap komponen dari H , jika H tidak terhubung) dapat diwarnai dengan lima warna sedemikian rupa sehingga vertex yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda. Kita kini kembali menyimpan vertex v . Karena v memiliki paling banyak lima tetangga, dan lima warna tersedia, maka ada sebuah warna yang dapat dipakai untuk vertex v kecuali v dikelilingi oleh lima vertex yang memiliki warna yang berbeda. Pada kasus ini, tidak ada lagi warna yang dapat dipakai untuk mewarnai v .



Untuk memecahkan kesulitan ini, kita perhatikan vertex berwarna merah dan hijau yang bertetangga dengan v , dan kita mencari tahu apakah ada path vertex merah dan vertex hijau di antara vertex merah yang bertetangga dan vertex hijau yang bertetangga. Ada dua kasus yang dapat muncul.

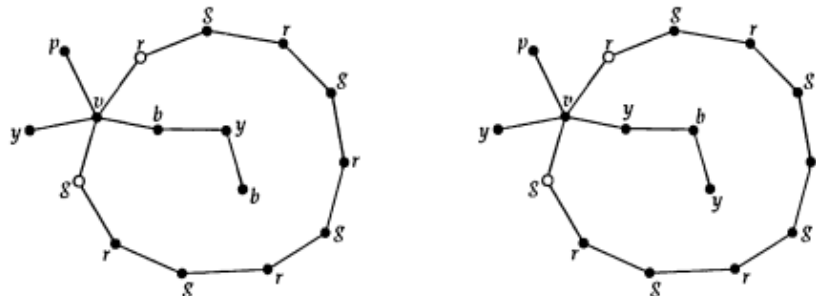
Pada kasus pertama, semua vertex merah dan hijau yang dapat dicapai dari vertex merah yang bertetangga adalah berbeda dari semua vertex merah dan hijau yang dapat dicapai dari vertex hijau yang bertetangga. Jadi tidak ada path merah-hijau ini. Pada kasus ini, kita mengganti warna pada bagian path merah-hijau sebagai berikut.



case (a): interchange red and green on top right; colour v red

Kita mengganti vertex merah yang bertetangga dengan v dengan vertex hijau, sehingga vertex v kini dapat diwarnai merah sehingga pewarnaan dengan lima warna dapat dilakukan.

Pada kasus kedua, terdapat path merah-hijau yang menyatu dengan vertex merah dan vertex hijau yang bertetangga dengan vertex v . Namun, karena graph ini adalah graph planar dan sudah terdapat path merah-hijau yang tertutup, maka tidak akan ada path biru-kuning antara vertex biru and kuning yang bertetangga dengan v . Kita dapat mengganti warna di bagian biru-kuning sebagai berikut.



case (b): interchange blue and yellow on right; colour v blue

Ganti vertex biru yang bertetangga dengan v dengan vertex kuning, sehingga v sekarang dapat diwarnai biru. Pewarnaan lima warna dari vertex G dapat dilakukan.

Karena pernyataan ini benar untuk semua graph planar terhubung sederhana dengan jumlah vertex kurang dari n , maka ini benar untuk semua graph planar terhubung sederhana dengan n vertex. Langkah 2 selesai. Karena itu, dengan prinsip induksi matematika, pernyataan ini benar untuk semua graph planar terhubung sederhana dengan n vertex, untuk setiap bilangan integer positif n .

Akhirnya kita menetapkan teorema empat warna untuk graph planar yang membutuhkan pembuktian lebih kompleks. Teorema ini berhubungan dengan pewarnaan peta yang akan kita pelajari selanjutnya.

Teorema 12.5 : Teorema Empat Warna untuk Graph Planar

Vertex pada setiap graph planar terhubung sederhana G , dapat diwarnai dengan empat warna (atau kurang) sedemikian rupa sehingga setiap vertex yang bertetangga dapat diberi warna yang berbeda.

Algoritma Pewarnaan Vertex

Belum terdapat algoritma yang efisien untuk mewarnai vertex pada graph. Karena itu kita harus mencari baik algoritma yang tidak efisien yang akan memberikan kita nilai yang benar untuk jumlah warna yang dibutuhkan, atau algoritma heuristic yang efisien namun hanya memberikan pendekatan dari nilai yang benar. Pada bagian ini kita akan menyajikan sebuah algoritma heuristic. Sebuah algoritma pewarnaan yang mudah dan biasanya memberikan jawaban yang baik. Metode ini merupakan algoritma greedy, yang diterangkan sebagai berikut.

Algoritma Greedy untuk Pewarnaan Vertex

Mulai dengan sebuah graph G dan sebuah daftar warna $1,2,3, \dots$

Langkah 1 :

Labeli vertex a,b,c secara acak.

Langkah 2 :

Identifikasi vertex yang belum diwarnai. Warnai vertex dengan warna pertama pada daftar yang belum dipakai vertex tetangga yang sudah diwarnai.

Ulangi langkah 2 sampai semua vertex diwarnai dan berhentilah.

Sebuah pewarnaan vertex dari G didapatkan. Jumlah warna yang diperoleh bergantung pada pelabelan yang dipilih untuk vertex di langkah 1.

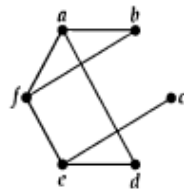
Kita akan mempelajari dua contoh menggunakan graph yang sama dengan label yang berbeda.

Ilustrasi A

Temukan pewarnaan vertex untuk graph G berikut.

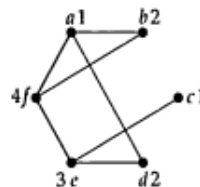


Langkah 1 : Labeli vertex a, \dots, f sebagai berikut.



Langkah 2 : Warnai

- Vertex a dengan warna 1
- Vertex b dengan warna 2
- Vertex c dengan warna 1
- Vertex d dengan warna 2
- Vertex e dengan warna 3
- Vertex f dengan warna 4

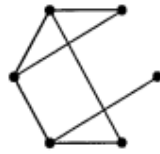


Semua vertex sekarang sudah diwarnai, maka berhenti.

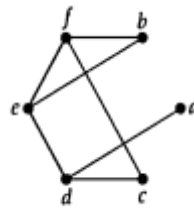
Kita memperoleh pewarnaan 4 untuk G .

Ilustrasi B

Temukan sebuah pewarnaan vertex dari graph G berikut.

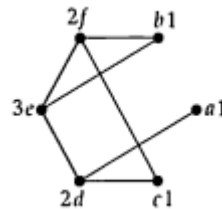


Langkah 1 Kita melabeli vertex a, \dots, f sebagai berikut.



Langkah 2 : Warnai

- Vertex a dengan warna 1
- Vertex b dengan warna 1
- Vertex c dengan warna 1
- Vertex d dengan warna 2
- Vertex e dengan warna 3
- Vertex f dengan warna 2

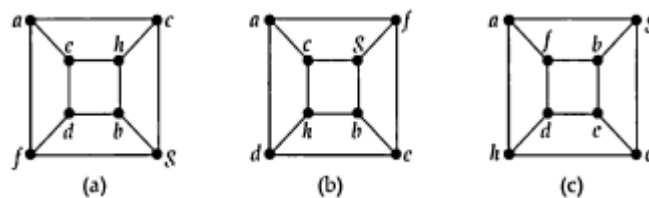


Semua vertex sekarang sudah diwarnai, maka berhenti
 Kita memperoleh pewarnaan 3 untuk G.

Pada contoh di atas, kita memperoleh sebuah pewarnaan vertex G dengan tiga warna, dan $\chi(G)=3$.

Latihan 12.3

Gunakan algoritma greedy untuk mewarnai graph G berikut, menggunakan masing-masing pelabelan berikut.



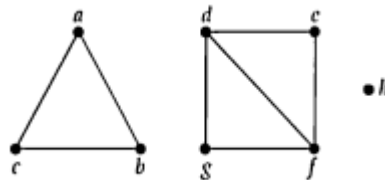
Berapa nilai $\chi(G)$ dari G?

Teorema 12.6

Untuk setiap graph G , ada sebuah pelabelan vertex untuk setiap algoritma greedy yang menghasilkan sebuah pewarnaan vertex dengan $\chi(G)$ warna.

Dekomposisi Vertex

Beberapa permasalahan yang paling menarik dalam teori graph melibatkan dekomposisi graph G ke dalam subgraph dengan tipe tertentu. Pada beberapa masalah, kita membagi himpunan vertex dari G ke dalam sub himpunan yang disjoint, ini disebut dekomposisi vertex G .



Gambar 12.4 Contoh graph tidak terhubung untuk ilustrasi dekomposisi vertex

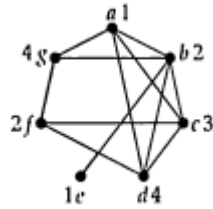
Sebagai contoh, tinjau graph tidak terhubung pada Gambar 12.4. Sebuah dekomposisi vertex pada kasus ini adalah pembagian himpunan vertex ke dalam sub himpunan yang disjoint yang berkoresponden dengan setiap komponen G , yaitu :

$$\{a,b,c\}, \{d,e,f,g\}, \{h\}.$$

Pada bagian ini, kita mengadopsi pendekatan yang serupa untuk beberapa masalah lain. Setiap masalah dapat diformulasikan dalam bentuk teoritik graph, dan melibatkan pembagian himpunan vertex pada graph ke dalam sub himpunan disjoint dengan sifat tertentu. Dengan melakukan ini, kita mengamati persamaan antara permasalahan dan dapat memulai untuk mengklasifikasikannya.

Masalah Pewarnaan**Contoh 12.1 : Penyimpanan Bahan Kimia**

Pada bagian 12.1 kita meninjau masalah perusahaan bahan kimia yang ingin menyimpan bahan kimia a,b,\dots,g pada sebuah gudang. Beberapa bahan kimia bereaksi secara berbahaya jika terjadi kontak, dan perusahaan akan membagi gudang ke dalam sejumlah area untuk memisahkan pasangan bahan kimia tertentu. Untuk menentukan jumlah terkecil area yang dibutuhkan untuk menyimpan bahan kimia secara aman, kita menggambar graph berikut. Vertex mewakili bahan kimia dan vertex dihubungkan jika bahan kimia tersebut harus dipisahkan.



Gambar 12.5 Dekomposisi vertex dalam masalah penyimpanan bahan kimia

Kita melihat penandaan area pada Gambar 12.5, sebagai masalah pewarnaan vertex di mana warna berkoresponden dengan area. Pewarnaan tersebut memberikan dekomposisi vertex pada graph di mana tidak ada dua vertex di sub himpunan yang sama yang bertetangga. Dekomposisi vertex yang muncul dari contoh ini adalah sebagai berikut.

$$\{a,e\}, \{b,f\}, \{c\}, \{d,g\};$$

Empat sub himpunan berkoresponden dengan bahan kimia di empat area. Pada masalah seperti ini, jumlah minimal himpunan yang dibutuhkan adalah bilangan kromatik pada graph tersebut.

Contoh 12.2 : Pewarnaan Peta

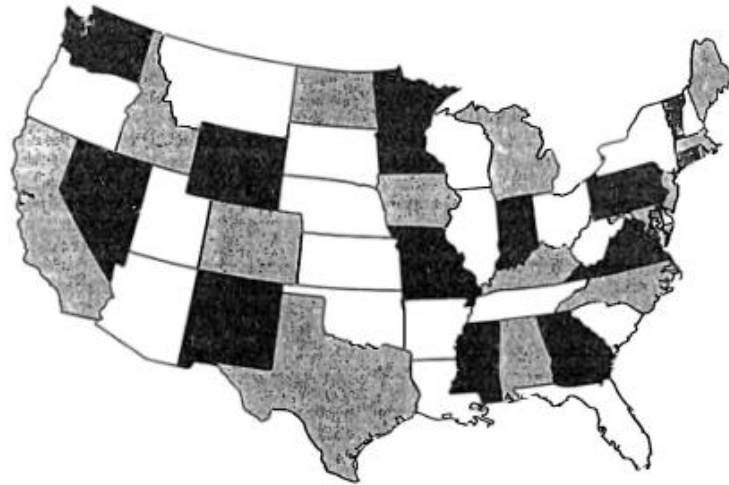
Pada permasalahan pewarnaan peta, kita ingin menentukan jumlah terkecil warna yang dibutuhkan untuk mewarnai peta sedemikian rupa sehingga dua daerah dengan batasan yang sama diwarnai berbeda. Pewarnaan ini membuat kita dapat membedakan antara daerah yang berbeda dan menempatkan batasannya.



Gambar 12.6 Peta USA (tidak termasuk Alaska dan Hawaii)

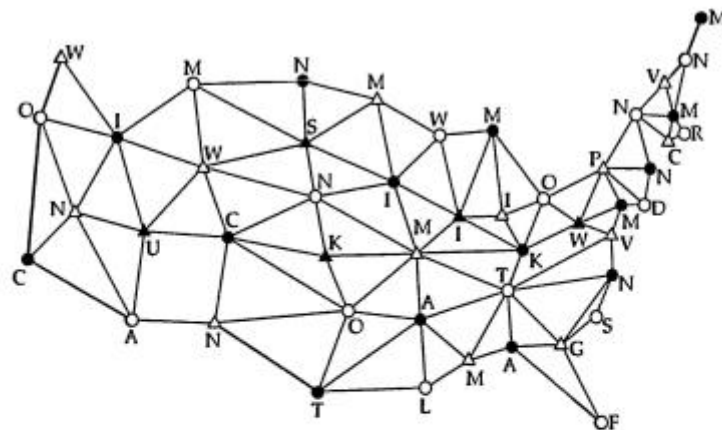
Tinjau peta USA pada Gambar 12.6. Berapa banyak warna yang dibutuhkan untuk mewarnai seluruh peta?

Peta ini tidak dapat diwarnai dengan tiga warna, karena tiga warna tidak cukup untuk menandai lima daerah yang mengelilingi Nevada, maka setidaknya empat warna dibutuhkan seperti ditunjukkan pada Gambar 12.7.



Gambar 12.7 Pewarnaan peta USA

Kita dapat merepresentasikan situasi ini sebagai pewarnaan vertex dengan meninjau dua permasalahan di mana setiap daerah direpresentasikan dengan vertex dan dua vertex yang dihubungkan jika daerah tersebut memiliki batas yang sama seperti yang ditunjukkan pada graph dalam Gambar 12.8. Setiap vertex ditandai sebuah simbol untuk merepresentasikan warna pada sebuah daerah. Karena dua tetangga pada peta asal diwarnai berbeda, maka dua vertex yang bertetangga pada graph harus ditandai warna yang berbeda. Pewarnaan vertex seperti ini membagi graph pada himpunan vertex ke dalam empat sub himpunan disjoint, yang berkoresponden dengan empat warna.

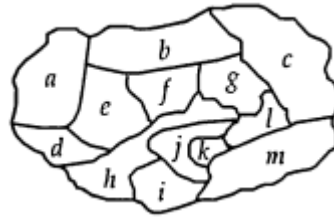


- △ Washington, Nevada, Wyoming, New Mexico, Minnesota, Mississippi, Missouri, Indiana, Georgia, Virginia, Pennsylvania, Connecticut, Vermont;
- Oregon, Montana, Arizona, Nebraska, Oklahoma, Louisiana, Wisconsin, Tennessee, Ohio, Florida, South Carolina, Delaware, New York, Rhode Island, New Hampshire
- California, Idaho, Colorado, North Dakota, Texas, Iowa, Michigan, Alabama, Kentucky, North Carolina, Maryland, New Jersey, Massachusetts, Maine, Arkansas;
- ▲ Utah, South Dakota, Kansas, Illinois, West Virginia.

Gambar 12.8 Solusi pewarnaan peta dalam bentuk graph

Latihan 12.5

Tinjau peta berikut.



- Temukan pewarnaan 4 pada peta tersebut.
- Gambar graph yang berkoresponden dan tunjukkan pewarnaan 4 pada bagian (a) yang mengarah ke sebuah dekomposisi vertex di mana tidak ada dua vertex pada himpunan yang sama yang bertetangga.

Catatan Sejarah

Pada tahun 1852, Francis Guthrie memperkenalkan masalah pewarnaan empat warna yang terkenal : dapatkah semua peta diwarnai dengan empat warna sedemikian rupa sehingga daerah yang bertetangga dapat diwarnai berbeda?

Masalah ini dipelajari oleh sejumlah matematikawan, termasuk Augustus De Morgan, Arthur Cayley dan Alfred Kempe, namun sampai tahun 1976 pembuktian ini baru dapat diberikan oleh Kenneth Appel dan Wolfgang Haken. Pembuktian mereka melibatkan pertimbangan hampir 2000 konfigurasi daerah, dan membuat penggunaan komputer yang berat. Sampai saat ini, tidak ada pembuktian yang mudah yang sudah ditemukan.

Contoh 12.3 : Pengumpulan Sampah

Sebuah jadwal mingguan untuk lori pengumpulan sampah akan diatur. Rute harian harus berbeda untuk Senin sampai Sabtu, dan beberapa bagian perlu dikunjungi beberapa kali dalam seminggu. Tidak boleh ada rute yang terlalu panjang atau terlalu pendek, setiap lori harus dipakai setiap hari kerja, dan setiap bagian harus dikunjungi sejumlah kali yang ditentukan. Bagaimana jadwal yang cocok dapat di desain?

Masalah ini adalah masalah yang cukup kompleks. Karena itu, saat ini kita hanya akan meninjau pada sebuah aspek saja. Kita akan meneliti apakah mungkin untuk menyusun sebuah jadwal sedemikian rupa sehingga dua lori berbeda tidak mengunjungi tempat yang sama pada hari yang sama. Kita membangun sebuah graph di mana setiap vertex merepresentasikan sebuah rute, dan dua vertex dihubungkan dengan edge ketika rute tersebut memiliki daerah yang sama. Jika vertex pada graph rute ini dapat diwarnai dengan enam warna (berkoresponden dengan hari senin sampai sabtu) maka vertex bertetangga dapat diwarnai berbeda, sehingga setiap vertex dapat memunculkan jadwal yang sesuai. Masalah ini juga merupakan permasalahan dekomposisi vertex di mana tidak ada dua vertex pada sub himpunan yang sama yang bertetangga.

Latihan 12.6

Gambar graph untuk rute untuk kendaraan dari industry A, \dots, R dan gunakan untuk mencari jumlah hari minimal yang dibutuhkan untuk memastikan tidak ada tempat yang dikunjungi lebih dari sekali pada hari yang sama. Seperti apa dekomposisi vertex yang bersesuaian?

Rute 1 : bagian A,B,C dan D

Rute 2 : bagian B,E,F dan G

Rute 3 : bagian B,H dan I

Rute 4 : bagian B dan F

Rute 5 : bagian E,G dan J

Rute 6 : bagian G,K dan L

Rute 7 : bagian L,M dan N

Rute 8 : bagian K dan N

Rute 9 : bagian A,H,O dan I

Rute 10 : bagian O dan P

Rute 11 : bagian C,P dan Q

Rute 12 : bagian C,Q dan R

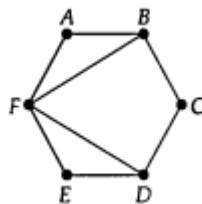
Masalah Himpunan Dominasi
Saluran Komunikasi

Misalkan saluran komunikasi dibuat di sejumlah kota dan stasiun transmisi dibuat pada beberapa kota tersebut sehingga kota tersebut dapat menerima pesan dari setidaknya satu stasiun transmisi. Untuk alasan ekonomi, kita membutuhkan sejumlah stasiun transmisi sesedikit mungkin.

Kita dapat merepresentasikan situasi ini dengan graph di mana vertex mewakili kota dan edge mewakili pasangan kota yang dapat berkomunikasi langsung satu sama lain. Karena setiap kota harus memuat sebuah stasiun transmisi atau berkomunikasi dengan sebuah kota yang memiliki stasiun transmisi, kita ingin menentukan sebuah himpunan vertex yang (diantara mereka) bertetangga ke semua vertex pada graph.

Contoh 12.4 : Lokasi Stasiun Transmisi

Misalkan graph berikut merepresentasikan saluran komunikasi antara enam kota A, B, \dots, F .



Kita dapat melokasikan stasiun transmisi di A, C, E , karena setiap vertex lain (B, D, F) bertetangga dengan setidaknya satu vertex tersebut. Vertex A, C, E ini membentuk sebuah himpunan dominasi. Kita mendapatkan dekomposisi vertex ke dalam sub himpunan kota yang dilayani oleh stasiun transmisi yang sama yaitu :

$$\{A, B, F\}, \{C, D\}, \{E\}$$

Kita dapat memperoleh solusi lebih ekonomis dengan hanya membuat dua stasiun transmisi di A dan D . Setiap vertex lainnya (B, C, E, F) bertetangga dengan setidaknya satu dari dua vertex tersebut. Vertex A dan D ini membentuk himpunan dominasi yang lebih kecil dari yang diperoleh pada solusi di atas. Dekomposisi yang bersesuaian adalah sebagai berikut :

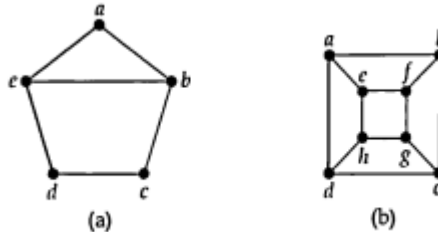
$$\{A, B, F\}, \{D, C, E\}$$

Pada masalah di atas, kita tidak menemukan himpunan dominasi yang memiliki hanya sebuah titik, maka kita mengatakan bahwa vertex A dan D membentuk sebuah himpunan dominasi minimal. Jumlah vertex pada himpunan dominasi minimal ini disebut bilangan dominasi, yang pada kasus ini bernilai 2. Catat bahwa, pada setiap dekomposisi vertex di atas, setiap sub himpunan memuat sebuah vertex yang bertetangga ke semua vertex lain pada sub himpunan tersebut.

Masalah lain yang berkaitan, misalnya masalah yang berhubungan dengan jumlah lokasi di sebuah pembangkit nuklir yang ditandai dengan lampu peringatan. Sensor disimpan di beberapa tempat untuk mengamati lampu ini. Kita dapat meminimalkan jumlah sensor dengan menemukan himpunan dominasi minimal pada graph yang berkoresponden dan memosisikan sensor tersebut. Cahaya lampu yang datang dapat dilihat oleh setidaknya sebuah sensor, dan tindakan yang perlu dapat segera dilakukan.

Latihan 12.7

Temukan himpunan dominasi minimal pada setiap graph berikut.



Pada setiap kasus, tuliskan sebuah dekomposisi vertex di mana setiap sub himpunan memuat sebuah vertex yang bertetangga dengan semua vertex dalam sub himpunan tersebut.

Catat bahwa jenis dekomposisi vertex diterangkan untuk masalah dominasi **berbeda** dengan yang diterangkan dalam masalah pewarnaan. Untuk masalah pewarnaan, pada setiap sub himpunan, tidak ada dua vertex yang bertetangga. Untuk masalah dominasi, pada setiap sub himpunan, terdapat sebuah vertex yang bertetangga dengan vertex lainnya pada sub himpunan tersebut.