

## 11. Planaritas

Oleh : Ade Nurhopipah

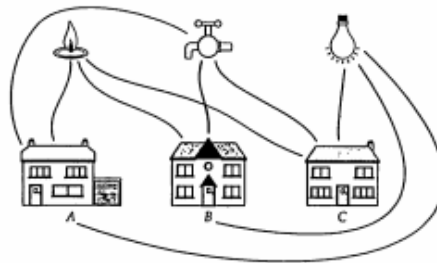
### Pokok Bahasan :

1. Graph Planar
2. Rumus Euler
3. Metode Cycle untuk Test Planaritas
4. Teorema Kuratowski
5. Dualitas

### Sumber :

Aldous, Joan M. ,Wilson, Robin J. 2004. *Graph and Applications*. Springer: UK.

Sebelumnya, kita telah mempelajari masalah utilitas. Pada masalah ini terdapat tiga rumah yang ingin dihubungkan dengan tiga utilitas, yaitu gas, air dan listrik, sedemikian rupa sehingga terbangun suatu koneksi yang tidak saling berpotongan. Masalah ini tidak dapat dipecahkan, karena akan selalu ada koneksi yang berpotongan seperti ditunjukkan pada Gambar 11.1.



**Gambar 11.1 Masalah Utilitas**

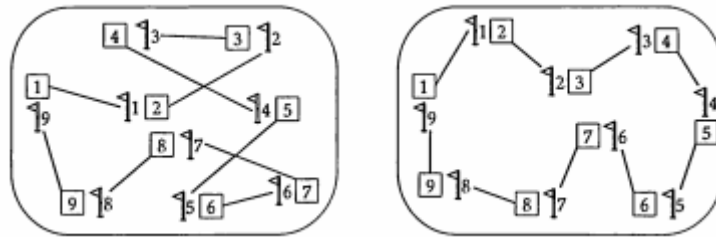
Masalah lain yang serupa adalah masalah desain pada papan sirkuit, di mana komponen elektronik dihubungkan dengan jalur yang dicetak pada papan. Koneksi yang dipakai ini juga tidak boleh berpotongan, karena dapat menyebabkan kontak listrik yang tidak diinginkan pada titik perpotongan tersebut.

Pada bagian ini kita akan mengamati sifat graph yang dapat di gambar dalam sebuah bidang tanpa ada perpotongan pada semua edge. Graph seperti ini disebut *graph planar*. Pada bab ini kita juga akan mempelajari rumus Euler dan teorema Kuratowski dan hasil teoritis yang memberikan syarat perlu dan syarat cukup agar sebuah graph menjadi planar. Kita juga akan mempelajari sebuah algoritma heuristic yang dapat digunakan pada graph planar.

### Graph Planar

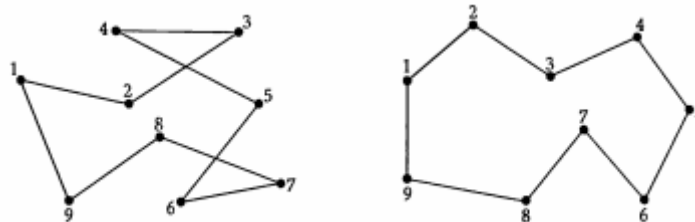
Misalkan kita ingin mendesain sembilan buah lubang golf. Cara yang benar adalah kita mendesainnya sedemikian rupa agar tidak ada dua rute yang berpotongan. Ini karena jika terdapat rute yang berpotongan akan menimbulkan ketidaknyamanan dan mungkin menyebabkan bahaya

untuk para pemain golf. Sebagai contoh, diagram pertama pada Gambar 11.2 adalah desain yang tidak sesuai, sedangkan graph kedua adalah desain yang lebih sesuai.



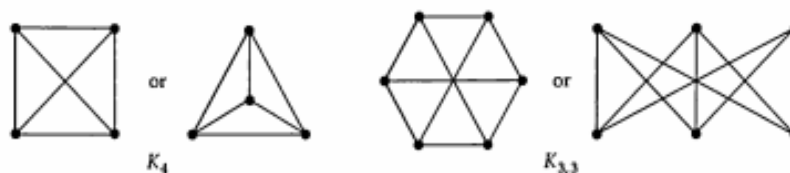
**Gambar 11.2** Desain letak lubang permainan golf

Kita dapat merepresentasikan setiap layout tersebut dengan graph cycle  $C_9$ . Sembilan vertex mewakili *teebox* atau area *putting green* di mana terdapat lubang golf, dan setiap edge mewakili jalurnya. Pada gambar pertama, beberapa edge berpotongan, sedangkan pada gambar kedua tidak berpotongan.



**Gambar 11.3** Representasi layout area *putting green* lapangan golf

Kita telah mempelajari beberapa contoh graph yang dapat digambar lebih dari satu cara. Sebagai contoh, graph komplit  $K_4$  dan graph bipartit komplit  $K_{3,3}$  dapat digambar seperti ditunjukkan pada Gambar 11.4.



**Gambar 11.4** Graph  $K_4$  dan graph  $K_{3,3}$  digambar dengan cara yang berbeda

Jenis penggambaran yang kita pilih sering tergantung pada kebutuhan pemakaian graph. Seperti pada masalah lokasi lubang golf, sangat berguna bagi kita untuk mengetahui bahwa kita dapat menggambar sebuah graph dengan suatu cara sehingga tidak ada dua edge yang saling berpotongan. Untuk beberapa graph seperti  $K_4$ , kita dapat menemukan cara menggambar graph tanpa ada edge yang berpotongan, sedangkan pada  $K_{3,3}$  tidak ada cara menggambar graph tersebut tanpa ada edge yang berpotongan.

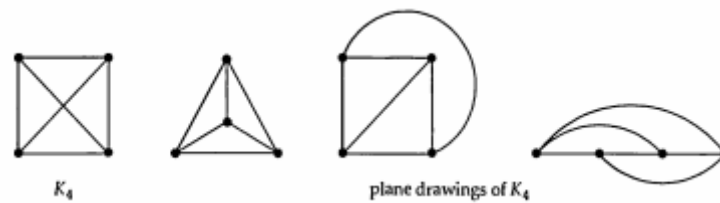
**Definisi 11.1**

Sebuah graph  $G$  adalah graph planar jika graph tersebut dapat digambar dalam sebuah bidang sedemikian rupa sehingga tidak ada dua edge yang bertemu kecuali pada sebuah vertex di mana keduanya insiden.

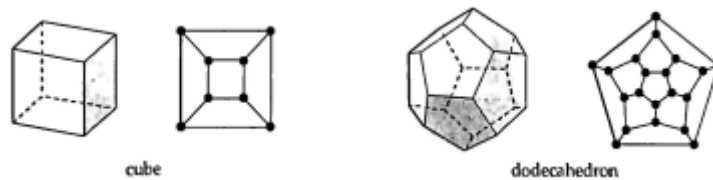
Penggambaran seperti ini di sebut *plane drawing* dari graph  $G$ .

Sebuah graph  $G$  tidak planar jika tidak ada plane drawing dari graph  $G$ .

Sebagai contoh, graph  $K_4$  adalah graph planar, karena dapat digambar tanpa ada edge yang berpotongan. Gambar 11.5 menunjukkan plane drawing untuk graph  $K_4$ . Graph cube dan dodecahedron juga merupakan graph planar, karena dapat digambar pada sebuah bidang tanpa berpotongan seperti pada Gambar 11.6.



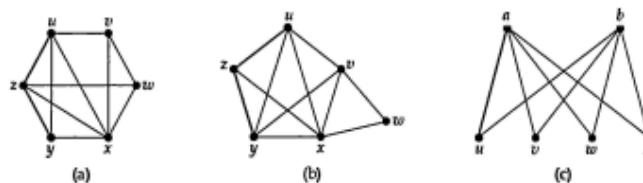
**Gambar 11.5 Plane drawing untuk graph  $K_4$**



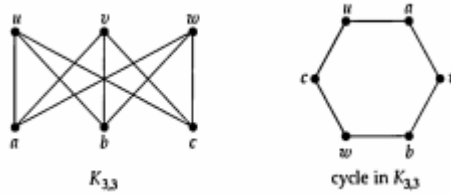
**Gambar 11.6 Plane drawing untuk cube dan dodecahedron**

**Latihan 11.1**

Tunjukan apakah graph berikut adalah graph planar dengan menemukan plane drawing pada masing-masing graph.

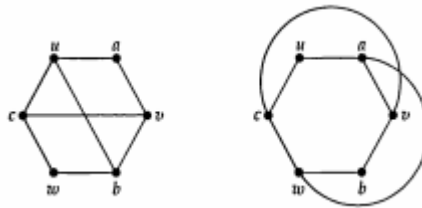


Di sisi lain, graph komplit bipartit  $K_{3,3}$  adalah graph yang tidak planar, karena setiap gambar yang terbentuk pasti memuat setidaknya satu perpotongan. Catat bahwa  $K_{3,3}$  memiliki cycle dengan panjang 6, misalnya  $uavbweu$ . Cycle ini muncul sebagai heksagon seperti ditunjukkan pada Gambar 11.7.



Gambar 11.7 Cycle dalam graph  $K_{3,3}$

Kita sekarang harus menyisipkan edge  $ub$ ,  $vc$ , dan  $wa$ . Kita dapat melihat bahwa hanya satu dari edge tersebut yang dapat digambar di dalam heksagon, karena jika dua edge di gambar di dalam, pastilah keduanya berpotongan. Demikian juga hanya satu edge yang dapat digambar di luar heksagon, karena jika dua edge di gambar di luar, keduanya akan berpotongan. Karena itulah mustahil untuk menyisipkan ketiga edge tanpa menciptakan sebuah perpotongan seperti ditunjukkan pada Gambar 11.8. Oleh sebab itu  $K_{3,3}$  bukan graph planar.

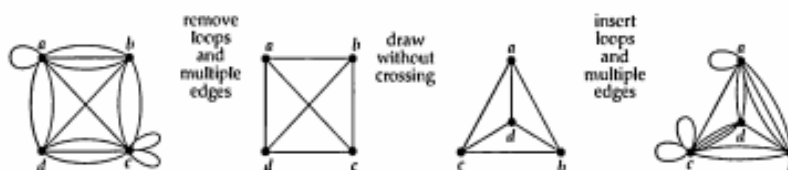


Gambar 11.8 Ilustrasi penggambaran graph  $K_{3,3}$

**Latihan 11.2**

1. Jelaskan mengapa masalah utilitas tidak memiliki solusi, kenapa tidak mungkin untuk menghubungkan setiap tiga rumah dengan tiga utilitas tanpa adanya perpotongan.
2. Beri sebuah penjelasan, seperti pada penjelasan untuk  $K_{3,3}$  untuk menunjukkan bahwa graph komplit  $K_5$  bukan graph planar.
3. Ada seorang raja dengan lima anak. Ia ingin setelah ia meninggal, setiap anaknya membuat sebuah istana dan kelima istana tersebut harus terhubung dengan jalan yang tidak saling berpotongan. Dapatkah hal ini dilakukan?

Pada bahasan ini, kita akan membatasi perhatian kita pada graph sederhana. Jika sebuah graph planar memiliki multiple edge atau loop, kita akan mengganti multiple edge dengan sebuah edge dan menghapus loop. Setelah diperoleh graph sederhana tanpa ada perpotongan, kita dapat menyisipkan lagi multiple edge dan loop tersebut seperti ditunjukkan pada Gambar 11.9.



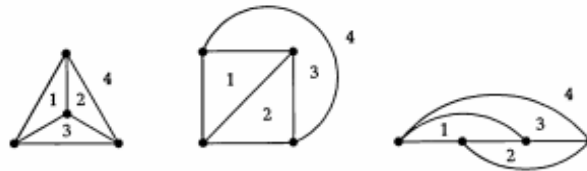
Gambar 11.9 Menggambar graph planar dari graph tidak sederhana

**Latihan 11.3**

1. Tentukan apakah setiap pernyataan berikut benar atau salah, dan berilah alasan atau contoh yang sesuai.
  - a. Setiap subgraph dari graph planar adalah planar
  - b. Setiap subgraph dari graph tidak planar adalah tidak planar
  - c. Setiap graph yang memuat sebuah subgraph planar adalah planar
  - d. Setiap graph yang memuat sebuah subgraph tidak planar adalah tidak planar.
2. Apakah tree adalah graph planar?
3. Untuk nilai  $n$  seperti apa graph cycle  $C_n$  adalah graph planar?
4. Untuk nilai  $n$  seperti apa graph komplit  $K_n$  adalah graph planar?
5. Untuk nilai  $s$  seperti apa graph bipartit komplit  $K_{1,s}$  dan  $K_{2,s}$  adalah graph planar?
6. Untuk nilai  $r$  dan  $s$  seperti apa (dimana  $r \leq s$ ) graph bipartit komplit  $K_{r,s}$  adalah graph planar?

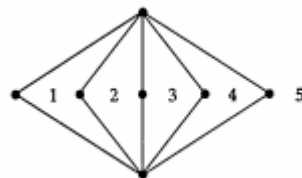
**Rumus Euler**

Pada bagian ini, kita akan mempelajari rumus Euler yang berhubungan dengan jumlah vertex, edge dan tampilan sebuah plane drawing pada graph planar. Pertama, kita berkenalan dengan istilah *face*. Setiap plane drawing dari graph planar membagi bidang ke dalam sejumlah daerah. Sebagai contoh, penggambaran graph  $K_4$ , membagi bidang menjadi empat yaitu tiga buah segitiga (3 cycle) dan sebuah daerah tak terbatas di luar graph seperti ditunjukkan oleh Gambar 11.10.



**Gambar 11.10 Face pada plane drawing**

Demikian pula, sebuah plane drawing  $K_{2,5}$  membagi bidang menjadi lima daerah, yaitu empat *quadrilateral* dan sebuah daerah tak hingga seperti ditunjukkan pada Gambar 11.11.

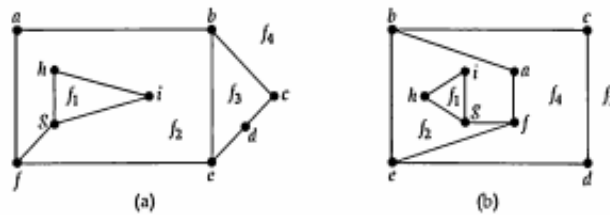


**Gambar 11.11 Face pada plane drawing  $K_{2,5}$**

**Definisi 11.2**

Misalnya  $G$  adalah graph planar, maka suatu plane drawing dari  $G$  membagi himpunan titik dari bidang yang tidak terletak pada  $G$  dalam daerah yang disebut *face*. Sebuah face tak terhingga disebut *infinite face*.

Catat bahwa daerah-daerah tersebut tidak termasuk vertex dan edge yang membentuk batasannya. Sebagai contoh, pada Gambar 11.12, graph diagram (a) memiliki empat face,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  dan  $f_4$ , di mana  $f_4$  adalah *infinite face*. Terdapat penggambaran alternative lain pada diagram (b), di mana face memiliki batasan yang sama namun  $f_3$  menjadi *infinite face*.



**Gambar 11.12** Ilustrasi face yang berbeda dengan batasan yang sama

**Latihan 11.4**

Temukan plane drawing dari diagram pada Gambar 11.12 di mana,

- a.  $f_2$  adalah *infinite face*
- b.  $f_1$  adalah *infinite face*

**Definisi 11.3**

Misalkan  $G$  adalah graph planar terhubung, dan misalkan  $f$  adalah sebuah face dalam plane drawing dari  $G$ . Maka derajat  $f$ , dinotasikan dengan  $\deg f$ , adalah jumlah edge yang bertemu pada sebuah walk yang mengelilingi batasan face  $f$ .

Jika semua face memiliki derajat yang sama  $g$ , maka  $G$  disebut face-regular dengan derajat  $g$ . Sebagai contoh, pada penggambaran graph  $G$  pada Gambar 11.12 (a) dan (b) masing-masing memiliki  $\deg f_1 = 3$  dan  $\deg f_3 = 4$ . Catat bahwa kedua belah edge  $gf$  terbentang dalam batasan face  $f_2$ , jadi edge  $gf$  harus dihitung dua kali, maka  $f_2=9$ .

Jika kita mencari jumlah semua derajat face, kita memperoleh  $3+4+9+6=22$ , di mana ini adalah tepat dua kali jumlah edge dari  $G$ . Ini membuat kita menyimpulkan bahwa handshaking lemma untuk graph memiliki analog untuk face dalam sebuah plane drawing graph planar.

**Teorema 11.1**

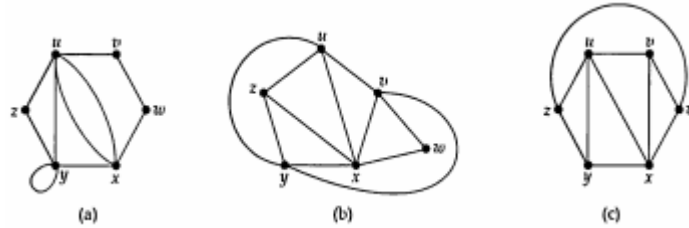
Pada suatu plane drawing, jumlah semua derajat face sama dengan dua kali jumlah edge.

**Bukti :**

Pada suatu plane drawing planar graph, setiap edge memiliki dua sisi (di mana mungkin terletak pada batasan sebuah face atau pada batasan dua buah face yang berbeda), jadi ia memberi kontribusi tepat 2 pada jumlah derajat face.

**Latihan 11.5**

1. Verifikasi versi handshaking lemma untuk setiap plane drawing pada graph planar berikut.



2. Untuk setiap plane drawing pada poin 1, hitung jumlah vertex, edge dan face, dan temukan nilai dari: (jumlah vertex)- (jumlah edge) + (jumlah face)

Pada solusi untuk point 2, kita dapat melihat bahwa untuk setiap plane drawing berlaku,

$$(\text{jumlah vertex}) - (\text{jumlah edge}) + (\text{jumlah face}) = 2$$

Persamaan ini berlaku untuk setiap plane drawing pada graph planar terhubung, dan dikenal sebagai rumus Euler.

**Teorema 11.2**

Misalkan  $G$  adalah graph planar terhubung, dan misalkan  $n, m$  dan  $f$  masing-masing adalah notasi untuk jumlah vertex, edge dan face pada plane drawing dari  $G$ , maka berlaku,

$$n - m + f = 2$$

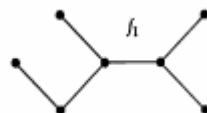
**Bukti :**

Sebuah plane drawing pada sebarang graph planar  $G$  dapat dibangun dengan mengambil sebuah spanning tree dari  $G$  dan menambahkan sebuah edge padanya, sampai sebuah plane drawing dari  $G$  diperoleh.

Kita membuktikan rumus Euler dengan menunjukkan bahwa :

- Untuk setiap spanning tree,  $n - m + f = 2$
- Menambahkan sebuah edge tidak merubah nilai dari  $n - m + f$ .

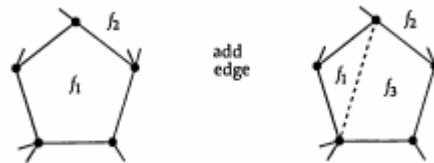
Pertama, kita membuktikan pernyataan (a), Misalkan  $T$  adalah spanning tree dari  $G$ , maka kita dapat menggambar  $T$  pada sebuah bidang tanpa berpotongan sebagai berikut.



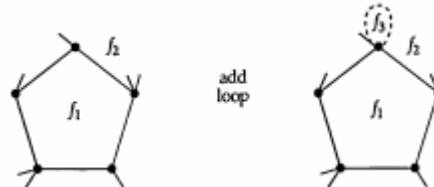
Karena  $T$  memiliki  $n$  vertex dan  $n-1$  edge, dan hanya terdapat sebuah face (yaitu *infinite face*), kita memiliki :

$$n - m + f = n - (n-1) + 1 = 2.$$

Sekarang kita akan membuktikan pernyataan (b) dengan menambahkan edge lain setiap tahap sampai sebuah plane drawing graph  $G$  terbentuk. Pada setiap tahap penambahan edge menghubungkan dua buah vertex yang berbeda seperti ditunjukkan sebagai berikut.



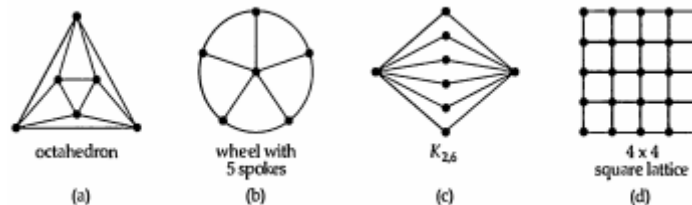
Atau menghubungkan sebuah vertex pada dirinya sendiri (loop) seperti ditunjukkan sebagai berikut.



Pada kasus ini, karena kita memiliki sebuah plane drawing dari  $G$ , jika kita menambahkan edge pada face, kita membaginya menjadi dua. Hal ini tidak menjadikan nilai  $n$  berubah, namun menambah nilai  $m$  dengan 1 dan meningkatkan nilai  $f$  dengan 1. Oleh karena itu nilai  $n-m+f$  tidak berubah, karena  $n-m+f=2$  sepanjang proses.

**Latihan 11.6**

Verifikasi rumus Euler untuk setiap graph berikut.



Kini kita akan menunjukkan rumus Euler dapat digunakan untuk membuktikan graph tertentu bukanlah graph planar. Pertama kita akan menurunkan dua akibat teorema 11.2 yang memberikan kita batas atas dari jumlah edge dari sebuah planar graph.

**Akibat 11.1**

Misalkan  $G$  adalah graph planar terhubung sederhana dengan  $n \geq 3$  vertex dan  $m$  edge, maka berlaku :  $m \leq 3n-6$



**Bukti :**

Misalkan sebuah plane drawing pada sebuah graph sederhana terhubung  $G$  dengan  $f$  face. Karena sebuah graph sederhana tidak memiliki loop dan multiple edge, derajat setiap face setidaknya 3. Maka menurut handshaking lemma untuk graph planar diperoleh,

$$3f \leq 2m$$

Substitusikan  $f$  dari rumus Euler,  $f = m - n + 2$ , kita memperoleh :

$$3m - 3n + 6 \leq 2m$$

maka,

$$m \leq 3n - 6$$

Seperti yang diinginkan.

**Contoh 11.1 :  $K_5$  bukanlah graph planar**

Bukti dengan kontradiksi

Misalkan  $K_5$  adalah graph planar. Karena  $K_5$  adalah graph terhubung dengan 5 vertex dan 10 edge, menurut bentuk akibat 11.1, maka :

$$10 \leq (3 \times 5) - 6$$

$$10 \leq 9$$

Pernyataan ini adalah salah. Maka kontradiksi ini menunjukkan bahwa  $K_5$  bukanlah graph planar.

Kita tidak dapat memakai akibat 11.1 untuk membuktikan bahwa graph komplit bipartit  $K_{3,3}$  tidak planar, karena  $K_{3,3}$  memiliki 6 vertex dan 9 edge dan pertidaksamaan:

$$9 \leq (3 \times 6) - 6$$

$$9 \leq 12$$

adalah benar.

Namun kita dapat membuktikan bahwa  $K_{3,3}$  tidak planar dengan menggunakan akibat untuk graph tanpa segitiga berikut.

**Akibat 11.2**

Misalkan  $G$  adalah graph planar terhubung sederhana dengan  $n \geq 3$  vertex,  $m$  edge dan tidak memiliki segitiga. Maka berlaku :  $m \leq 2n - 4$

**Bukti :**

Misalkan sebuah plane drawing pada graph planar terhubung sederhana  $G$  dengan  $f$  face dan tidak memiliki segitiga. Derajat setiap face pada graph ini setidaknya adalah 4. Oleh karena itu menurut handshaking lemma untuk graph planar :

$$4f \leq 2m$$

$$2f \leq m$$

Substitusikan rumus Euler,  $f = m - n + 2$ , kita mendapatkan

$$2m - 2n + 4 \leq m$$

$$m \leq 2n - 4.$$



**Contoh 11.2 :  $K_{3,3}$  bukanlah graph planar**

Bukti dengan kontradiksi

Misalkan  $K_{3,3}$  adalah graph planar. Karena  $K_{3,3}$  adalah graph terhubung sederhana dengan 6 vertex dan 9 edge dan tidak memiliki segitiga, maka menurut Akibat 11.2, maka berlaku

$$9 \leq (2 \times 6) - 4$$

$$9 \leq 8$$

Di mana ini adalah pernyataan yang salah. Kontradiksi ini menunjukkan bahwa  $K_{3,3}$  bukan graph planar.

**Latihan 11.7**

1. Pada kondisi seperti apa, Akibat 11.1 dan 11.2, memberikan persamaan  $m=3n-6$  dan  $m=2n-4$
2. Misalkan  $G$  adalah graph planar sederhana terhubung dengan  $n \geq 5$  vertex dan  $m$  edge dan cycle terpendek memiliki panjang 5. Buktikan bahwa  $m \leq \frac{5}{3}(n-2)$   
Petunjuk : Gunakan metode pembuktian untuk Akibat 11.1 dan 11.2
3. Tunjukkan bahwa graph Petersen berikut bukan graph planar.

**Akibat 11.3**

Misalkan  $G$  adalah graph planar terhubung sederhana, maka  $G$  memuat sebuah vertex dengan derajat 5 atau kurang.

**Latihan 11.8**

1. Buktikan Akibat 11.3  
Petunjuk : Gunakan Akibat 11.1 dan berikan pembuktian dengan kontradiksi.
2. Berikan contoh pada kondisi berikut,
  - a. Sebuah graph planar sederhana terhubung di mana setiap vertex memiliki derajat 5
  - b. Sebuah graph non-planar sederhana terhubung di mana setiap vertex memiliki derajat 6.

Pembatasan jumlah edge pada sebuah graph planar diberikan oleh Akibat 11.1 dan 11.2 berguna untuk menunjukkan bahwa graph tertentu bukanlah graph planar. Sebagai contoh, kita menggunakannya untuk menunjukkan bahwa  $K_5$  dan  $K_{3,3}$  adalah tidak planar. Namun sayangnya, metode ini tidak bekerja sebaliknya, ada graph-graph (seperti graph Petersen) yang memenuhi pertidaksamaan ini namun bukanlah graph planar. Karena itu, kini kita mengalihkan perhatian kita pada cara lain untuk menentukan apakah sebuah graph adalah graph planar atau bukan.

### Metode Cycle untuk Test Planaritas

Pada banyak aplikasi praktis, sangat penting untuk menguji apakah sebuah graph adalah graph planar atau tidak. Ada beberapa cara untuk melakukan ini, salah satunya yang akan kita pelajari adalah metode cycle. Metode ini adalah algoritma heuristic yang dapat diaplikasikan pada graph kecil yang memuat cycle Hamilton. Terdapat algoritma yang lebih cepat dan berlaku untuk semua kasus, namun tidak kita pelajari disini.

Diberikan sebuah graph  $G$ , kita mencari sebuah cycle Hamilton, menggambar cycle ini sebagai sebuah polygon teratur kemudian mencoba menggambar sisa edge sehingga tidak ada edge yang saling berpotongan. Kita memperoleh sebuah cycle Hamilton  $C$ , lalu kita mendaftar sisa edge dari  $G$  dan membaginya pada dua himpunan  $A$  dan  $B$  sebagai berikut.

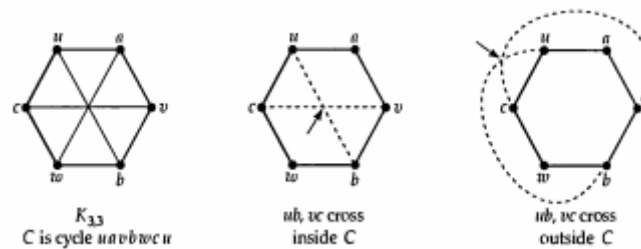
$A$  adalah himpunan edge yang dapat digambar di dalam  $C$  tanpa berpotongan.

$B$  adalah himpunan edge yang dapat digambar di luar  $C$  tanpa berpotongan.

Jika pembagian ini memungkinkan, graph  $G$  adalah graph planar, dan kita dapat menggunakan himpunan  $A$  dan  $B$  untuk memperoleh sebuah plane drawing dari  $G$ . Jika pembagian ini tidak mungkin dilakukan maka  $G$  bukanlah graph planar.

Kita telah mempelajari contoh sebelumnya bahwa kita menguji graph komplit bipartit  $K_{3,3}$ . Kita memulai dengan pernyataan bahwa  $K_{3,3}$  memiliki cycle Hamilton  $C$  dengan panjang 6, di mana kita dapat menggambarnya pada sebuah bidang sebagai hexagon teratur  $uavbwc$ . Kita lalu mencoba menggambar tiga edge yang tersisa  $ub$ ,  $vc$  dan  $wa$ , namun hanya satu buah edge yang dapat dibuat di dalam  $C$  dan satu buah yang dapat dibuat di luar  $C$ , karena jika dibuat dua-duanya, maka dia akan berpotongan seperti ditunjukkan pada Gambar 11.13.

Maka jika kita menyimpan  $ub$  pada himpunan  $A$  dan  $vc$  di himpunan  $B$ , maka kita tidak dapat menyimpan  $wa$  di kedua himpunan tersebut. Karena kita tidak dapat menggambar ketiga edge tanpa berpotongan, maka graph  $K_{3,3}$  tidak planar.

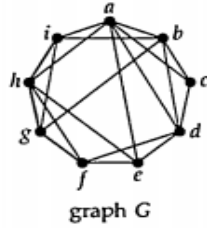


**Gambar 11.13 Metode cycle untuk Tes Planaritas  $K_{3,3}$**

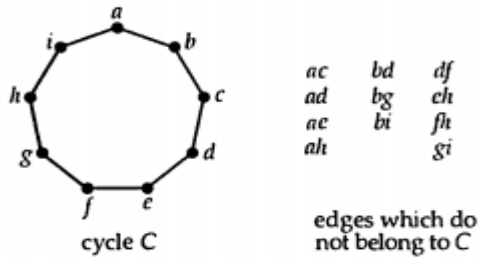
Kita katakan bahwa edge  $ub$  dan  $vc$  tidak sesuai (*incompatible*), karena keduanya tidak dapat digambar di dalam  $C$  ataupun di luar  $C$  tanpa berpotongan. Begitu juga edge  $ub$  dan  $wa$  tidak sesuai. Edge yang dapat digambar di dalam  $C$  atau di luar  $C$  tanpa berpotongan disebut sesuai (*compatible*). Contoh berikut menunjukkan bagaimana ide tentang ketidaksesuaian edge dapat dipakai untuk menguji planaritas pada graph yang lebih kompleks.

**Contoh 11.3**

Kita akan menentukan apakah graph G berikut adalah graph planar.

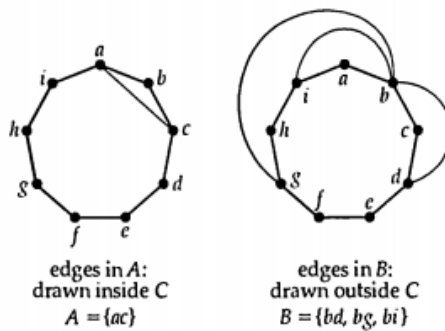


Kita pilih sebuah cycle yang tepat C di G, biasanya kita pilih cycle Hamilton  $abcdefghia$ .  
Lalu kita daftar edge yang tidak ada di C.



Kita simpan edge pertama pada list, yaitu  $ac$  pada himpunan A dan hapus edge tersebut pada daftar. Edge  $ac$  tidak sesuai dengan  $bd$ ,  $bg$  dan  $bi$ , sehingga kita menyimpan edge tersebut pada himpunan B. Semua edge di B sesuai satu sama lain, sehingga kita dapat menghapus ketiganya dari list.

Kita memperoleh  $A = \{ac\}$ ,  $B = \{bd, bg, bi\}$ , dan sisa daftar edge  $ad, ae, ah, df, eh, fh, gi$ .  
Kini kita mendapatkan situasi seperti digambarkan dibawah ini.



Kini kita tinjau setiap edge dari B.

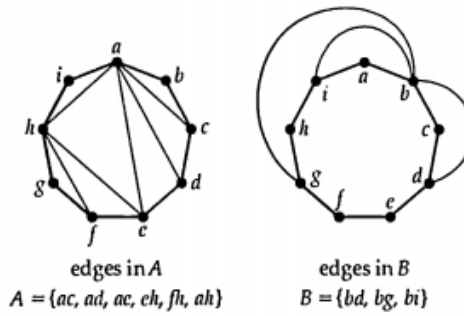
Edge  $bd$  sesuai dengan setiap edge dalam list.

Edge  $bg$  tidak sesuai dengan  $ad$ ,  $ae$ ,  $eh$  dan  $fh$ , sehingga kita simpan  $ad$ ,  $ae$ ,  $eh$  dan  $fh$  ke himpunan A. Semua edge di himpunan A sesuai satu sama lain, maka kita hapus keempat edge tersebut dari list. Tersisa daftar edge :  $ah, df, gi$ .

Edge  $bi$  tidak sesuai dengan  $ah$ , jadi kita simpan  $ah$  di A, semua edge di A sesuai satu sama lain, sehingga kita hapus  $ah$  pada daftar. Tersisa daftar edge :  $df, gi$ .

Kita memperoleh  $A = \{ac, ad, ae, eh, fh, ah\}$ ,  $B = \{bd, bg, bi\}$ , dan sisa daftar edge,  $df, gi$ .

Kini kita mendapatkan situasi sebagai berikut.



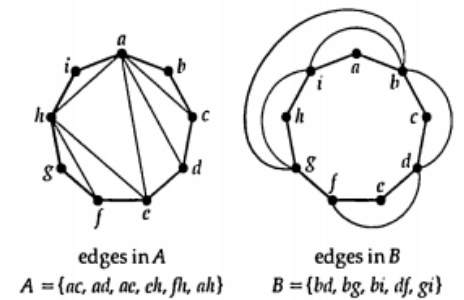
Kita kini tinjau setiap edge dari A

Edge  $ad$  sesuai dengan setiap edge dalam daftar.

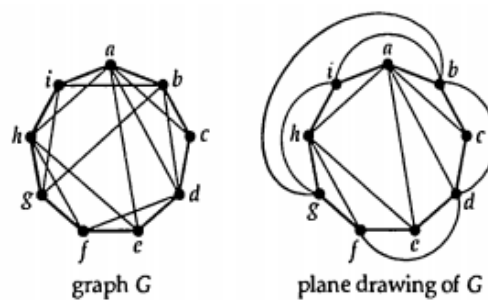
Edge  $ae$  tidak sesuai dengan  $df$ , sehingga kita simpan  $df$  ke himpunan B. Semua edge di himpunan B sesuai satu sama lain, sehingga kita hapus  $df$  dari daftar. Tersisa daftar edge :  $gi$ .

Edge  $eh$  tidak sesuai dengan  $gi$ , sehingga kita letakan  $gi$  di himpunan B, Semua edge di himpunan B sesuai satu sama lain, sehingga kita hapus  $gi$  pada daftar.

Kita memperoleh  $A = \{ac, ad, ae, eh, fh, ah, \}$ ,  $B = \{bd, bg, bi, df, gi\}$ , dan daftar edge sudah kosong, sehingga kita mendapatkan graph berikut.

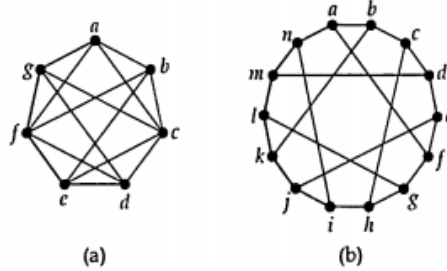


Semua edge di A sesuai dan semua edge di B juga sesuai, sehingga G adalah graph planar. Untuk mendapatkan sebuah plane drawing dari G, kita mengkombinasikan dua buah gambar sebagai berikut.



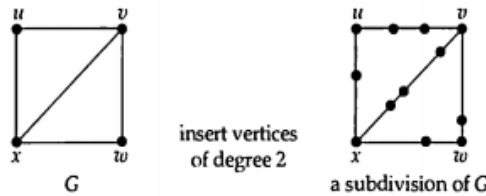
**Latihan 11.9**

Gunakan metode cycle untuk menentukan apakah graph berikut adalah graph planar. Jika iya, berikan sebuah plane drawing.



**Teorema Kuratowski**

Kita akan mempelajari dua metode teoritis untuk menentukan planaritas. Metode pertama melibatkan penyisipan vertex dengan derajat 2 ke dalam edge pada sebuah graph  $G$ , seperti ditunjukkan pada Gambar 11.14.



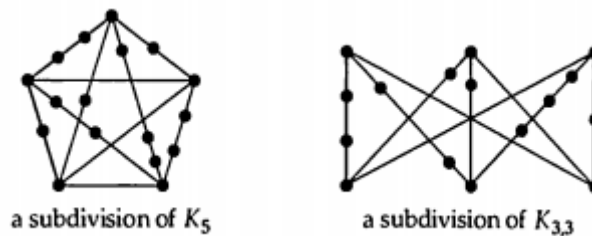
**Gambar 11.14** Penyisipan edge berderajat 2 pada sebuah graph

Setiap graph yang dibentuk dari  $G$  dengan cara seperti ini disebut subdivisi dari  $G$ . Karena penyisipan vertex berderajat 2 tidak berpengaruh pada planaritas sebuah graph, kita menyimpulkan hasil sebagai berikut.

*Jika  $G$  adalah graph planar, maka setiap subdivisi dari  $G$  adalah planar*

*Jika  $G$  adalah subdivisi dari sebuah graph tidak planar, maka  $G$  tidak planar*

Sebagai contoh, graph pada Gambar 11.15 adalah graph tidak planar, karena yang pertama sebuah subdivisi dari  $K_5$  dan kedua subdivisi dari  $K_{3,3}$ .

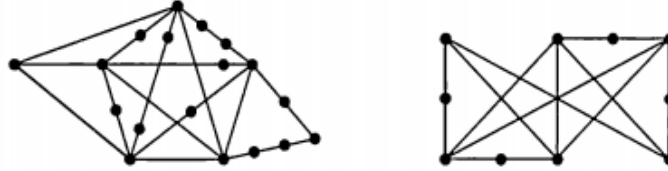


**Gambar 11.15** Subdivisi dari  $K_5$  dan subdivisi dari  $K_{3,3}$

Dari kedua pengamatan tersebut diperoleh :

*Jika  $G$  adalah graph yang memuat sebuah subdivisi dari  $K_5$  atau  $K_{3,3}$  maka graph tersebut tidak planar.*

Sebagai contoh, graph pada Gambar 11.16 bukanlah graph planar, karena yang pertama memuat sebuah subdivisi dari  $K_5$  dan yang kedua memuat subdivisi dari  $K_5$ .



**Gambar 11.16 Graph yang memuat subdivisi  $K_5$  dan  $K_{3,3}$  tidak planar**

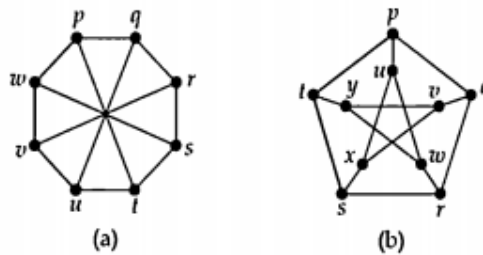
Pada bagian ini, kita banyak memperhatikan graph  $K_5$  dan  $K_{3,3}$  serta subdivisinya. Ini karena terdapat sebuah teori bahwa setiap graph tidak planar dapat diperoleh dengan cara menambahkan vertex dan edge ke sebuah subdivisi dari  $K_5$  dan  $K_{3,3}$ . Dengan kata lain, jika  $G$  adalah graph tidak planar, maka  $G$  memuat sebuah subdivisi dari  $K_5$  dan  $K_{3,3}$ . Teori ini muncul pada tahun 1930 oleh matematikawan Polandia, Kazimierz Kuratowski. Secara formal ide ini dituangkan dalam teorema berikut.

**Teorema 11.3 : Teorema Kuratowski**

Sebuah graph adalah graph planar jika dan hanya jika graph tersebut tidak memuat subdivisi dari graph  $K_5$  dan  $K_{3,3}$

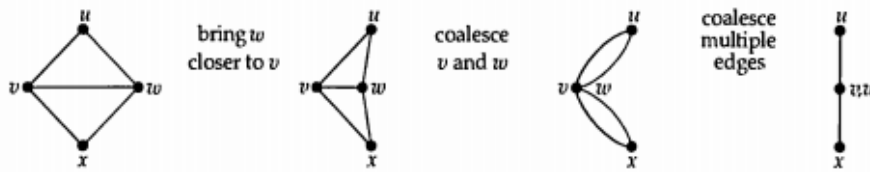
**Latihan 11.10**

Gunakan teorema Kuratowski untuk membuktikan bahwa setiap graph berikut bukanlah graph planar.



Petunjuk : Untuk graph (b) tinjau subgraph yang diperoleh dengan menghapus dua edge yang horizontal.

Karakteristik lain pada graph planar melibatkan notasi kontraksi sebuah edge. Ini dilakukan dengan membawa sebuah vertex lebih dekat ke vertex lain sampai mereka bertemu dan bersatu. Selanjutnya multiple edge yang tercipta diganti menjadi sebuah edge. Pada Gambar 11.17 kita melakukan kontraksi dengan menyingkat edge  $vw$ .



**Gambar 11.17** Kontraksi edge pada graph

Kontraksi sebuah graph adalah hasil dari kontraksi edge. Sebagai contoh,  $K_5$  adalah kontraksi dari graph Petersen seperti yang ditunjukkan Gambar 11.18.



**Gambar 11.18** Kontraksi graph Petersen menghasilkan graph  $K_5$

Selanjutnya kita akan mempelajari analog untuk teorema Kuratowski sebagai berikut.

**Teorema 11.4**

Sebuah graph adalah graph planar jika hanya jika ia tidak memuat subgraph  $K_5$  dan  $K_{3,3}$  sebagai sebuah kontraksi

Teorema 11.3 dan 11.4 dinilai penting karena kedua teorema ini memberikan syarat cukup dan syarat perlu bagi sebuah graph agar menjadi graph planar. Teorema ini lebih melibatkan istilah graph dalam bentuk teoritisnya (subgraph, subdivisi, konstruksi), dari pada istilah bentuk geometrisnya (berpotongan, penggambaran dalam bidang). Teorema tersebut juga menyediakan sebuah demonstrasi yang menyakinkan bahwa sebuah graph yang diberikan bukan graph planar, jika kita mendapatkan sebuah subgraph yang merupakan subdivisi dari  $K_5$  atau  $K_{3,3}$  atau subgraph yang memiliki  $K_5$  dan  $K_{3,3}$  sebagai sebuah kontraksi.

Namun, teorema 11.3 dan 11.4 tidak menyediakan cara yang mudah untuk menggambarkan bahwa sebuah graph adalah graph planar, karena kita harus memperhatikan sejumlah besar subgraph dan memverifikasi bahwa tidak ada yang menjadi subdivisi dari  $K_5$  atau  $K_{3,3}$  dan memuat  $K_5$  atau  $K_{3,3}$  sebagai kontraksi. Untuk alasan ini, tidak ada algoritma yang digunakan untuk menguji planaritas dari graph berdasarkan teorema ini.

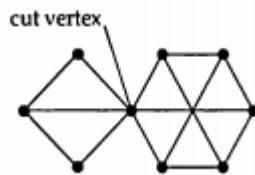


Sebuah observasi yang memberikan kesimpulan apakah graph yang diberikan adalah graph planar atau bukan sebagai berikut.

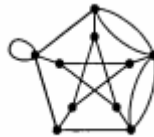
- Sebuah graph tidak terhubung adalah graph planar jika hanya jika setiap komponennya adalah planar. Sebagai contoh, graph berikut adalah graph tidak planar, karena sebuah komponennya adalah subdivisi dari  $K_5$ .



- Sebuah graph yang memiliki sebuah cut vertex adalah graph planar jika hanya jika setiap subgraph yang dihasilkan ketika graph tersebut adalah graph planar. Cut vertex adalah sebuah vertex yang jika dihapus membuat graph tidak terhubung. Sebagai contoh graph berikut tidak planar karena memuat subgraph  $K_{3,3}$ .

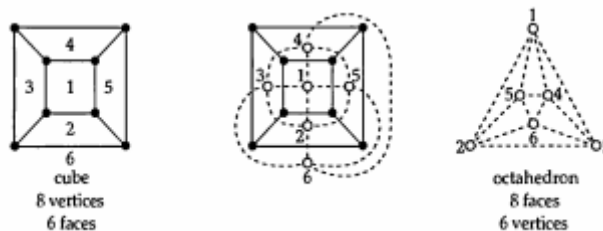


- Sebuah graph yang memiliki loop atau multiple edge adalah planar jika hanya jika graph yang diperoleh dengan menghapus loop dan menyatukan multiple edge adalah planar. Sebagai contoh graph berikut adalah graph tidak planar karena menghasilkan graph Petersen.



### Dualitas

Untuk mengilustrasikan ide dualitas, kita akan meninjau graph cube. Jika kita menempatkan sebuah vertex baru di dalam setiap face (termasuk infinite face) dan menghubungkan pasangan vertex baru pada face bertetangga, kita mendapatkan graph octahedron seperti ditunjukkan pada Gambar 11.19, begitu juga sebaliknya. Vertex baru direpresentasikan oleh lingkaran kecil dan garis yang menghubungkan mereka diindikasikan dengan garis putus-putus.



Gambar 11.19 Graph dual untuk cube adalah octahedron

Secara umum, untuk setiap graph planar terhubung  $G$ , kita mendefinisikan graph dual  $G^*$  yang bersesuaian sebagai berikut.

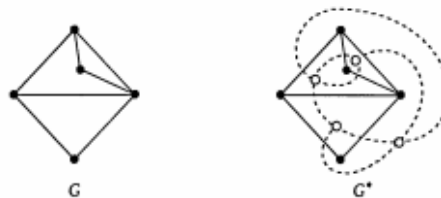
**Definisi 11.4**

Misalkan  $G$  adalah graph planar terhubung, maka sebuah graph dual  $G^*$  adalah bentuk yang dibangun dari plane drawing  $G$  sebagai berikut.

Gambar sebuah titik baru pada setiap face pada plane drawing, ini merupakan vertex di  $G^*$ .

Gambar sebuah garis yang menghubungkan vertex-vertex  $G^*$ , yang memotong setiap sisi  $e$  pada plane drawing  $G$ , garis ini merupakan edge untuk  $G^*$ .

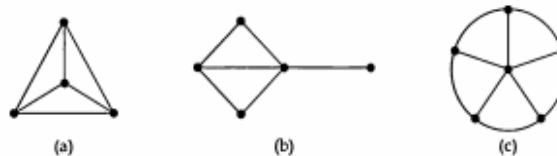
Prosedur pada definisi tersebut diilustrasikan pada Gambar 11.20.



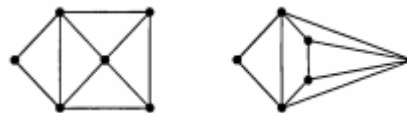
**Gambar 11.20** Prosedur membangun graph dual

**Latihan 11.11**

1. Gambar dual dari setiap plane drawing pada graph planar berikut.



2. Graph berikut menunjukkan dua plane drawing berbeda untuk sebuah graph planar. Tunjukkan bahwa dual keduanya tidak isomorfik.



Jika graph  $G^*$  adalah plane drawing untuk graph planar terhubung, maka kita dapat membangun  $(G^*)^*$  yang merupakan dual  $G^*$ . Sebagai contoh graph dual yang diperoleh pada Gambar 11.20 dapat menghasilkan graph dual  $(G^*)^*$  yang ditunjukkan pada Gambar 11.21.



**Gambar 11.21** Graph dual  $(G^*)^*$  isomorfik dengan  $G$

Gambar 11,21 tersebut mendemonstrasikan bahwa konstruksi  $G^*$  yang muncul dari  $G$  dapat dibalik untuk mendapatkan  $G$  dari  $G^*$ . Sebagai contoh, dual graph octahedron adalah sebuah graph cube. Oleh karena itu graph  $(G^*)^*$  isomorfik dengan graph  $G$ .

Ada sebuah hubungan sederhana antara jumlah vertex, edge dan face dari graph dan dualnya. Pada contoh di atas,  $G$  memiliki 5 vertex, 7 edge dan 4 face (termasuk infinite face), dan  $G^*$  memiliki 4 vertex, 7 edge dan 5 face. Secara umum hasil ini dapat dituliskan dalam teorema berikut.

**Teorema 11.5**

Misalkan  $G$  adalah sebuah plane drawing dari graph planar terhubung dengan  $n$  vertex,  $m$  edge dan  $f$  face. Maka dual  $G$  yaitu  $G^*$  memiliki  $f$  vertex,  $m$  edge dan  $n$  face.

**Bukti :**

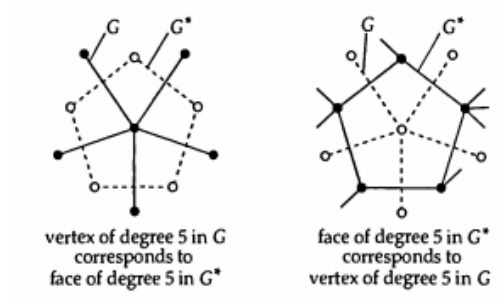
Kita mengetahui bahwa  $G^*$  memiliki  $f$  vertex, dan  $m$  edge, jika  $G^*$  memiliki  $f^*$  face, dengan menerapkan rumus Euler pada kedua  $G$  dan  $G^*$ , maka kita memperoleh :

Untuk  $G$  :  $n-m+f=2$

Untuk  $G^*$ :  $f-m+f^*=2$

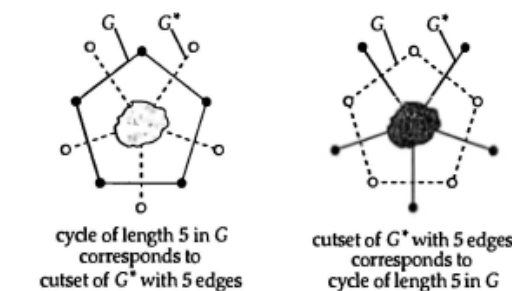
Maka kita memperoleh  $f^* = n$ , seperti yang diinginkan.

Sebuah vertex dengan derajat  $k$  di  $G$  berkoresponden dengan sebuah face dengan derajat  $k$  di  $G^*$ , dan sebaliknya. Gambar 11.22 menggambarkan korespondensi ini dengan  $k=5$ .



**Gambar 11.22 Korespondensi derajat titik di  $G$  dengan derajat face di  $G^*$**

Lebih jauh lagi, sebuah cycle dengan panjang  $k$  di  $G$  berkoresponden dengan sebuah cutset dengan  $k$  buah edge di  $G^*$  dan sebaliknya. Gambar 11.23 memberikan ilustrasi untuk  $k=5$ .



**Gambar 11.23 Korespondensi panjang cycle di  $G$  dengan cutset di  $G^*$**

Untuk memperoleh korespondensi tersebut, kita mengambil sebuah cycle di  $G$  (ditunjukkan dengan garis tegas) dan korespondensi edge di  $G^*$  (ditunjukkan dengan garis putus-putus). Kita membangun sebuah cutset yang penghapusannya memisahkan himpunan vertex di dalam cycle dan di luar cycle. Kita merangkum korespondensi tersebut pada Tabel 11.1 sebagai berikut.

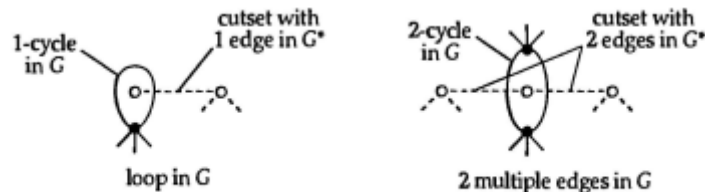
**Tabel 11.1 Korespondensi antara  $G$  dan  $G^*$** 

Plane drawing $G$	Dual Graph $G^*$
Sebuah edge di $G$	Sebuah edge di $G^*$
Sebuah vertex dengan derajat $k$ di $G$	Sebuah face dengan derajat $k$ di $G^*$
Sebuah face dengan derajat $k$ di $G$	Sebuah vertex dengan derajat $k$ di $G^*$
Sebuah cycle dengan panjang $k$ di $G$	Sebuah cutset $G^*$ dengan $k$ edge
Sebuah cutset $G$ dengan $k$ edge	Sebuah cycle dengan panjang $k$ di $G^*$

Kita dapat memakai korespondensi ini untuk menulis kembali Akibat 11.1 sebagai berikut.

Misalkan  $G$  adalah graph planar terhubung dengan  $n \geq 3$  vertex dan  $m$  edge  $s$  tidak memiliki loop atau multiple edge, maka  $m \leq 3n - 6$ .

Sekarang loop (cycle dengan panjang 1) dan pasangan multiple edge (cycle dengan panjang 2) pada  $G$  berkoresponden dengan cutset dengan ukuran 1 dan 2 edge di  $G^*$


**Gambar 11.24 Korespondensi loop dan multiple edge di  $G$  dengan cutset di  $G^*$** 
**Teorema 11.6**

Misalkan  $G^*$  adalah graph planar terhubung dengan  $f$  face dan  $m$  edge serta tidak memiliki cutset dengan 1 atau 2 edge, maka  $m \leq 3f - 6$ .

Demikian juga, kita dapat menulis kembali Akibat 11.3 sebagai berikut.

Misalkan  $G$  adalah graph planar terhubung yang tidak memiliki loop dan multiple edge, maka  $G$  memiliki vertex dengan derajat 5 atau kurang.

**Teorema 11.6**

Misalkan  $G^*$  adalah graph planar terhubung yang tidak memiliki cutset dengan 1 atau 2 edge, maka  $G^*$  memiliki face dengan derajat 5 atau kurang.